

УДК 517.1; 530.1

Оценки диэлектрической проницаемости сферопластика

Зарубин В. С.^{1,*}, Кувыркин Г. Н.¹, Савельева И. Ю.¹

* fn2@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Двойственная вариационная формулировка задачи электростатики в неоднородной сплошной среде, содержащая два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), достигающих на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений, использована в сочетании с четырехфазной моделью структуры сферопластика для построения гарантированных двусторонних границ области параметров, в которой расположены истинные значения эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика. Путем перехода от исходной четырехфазной к более простой трехфазной модели структуры сферопластика получены расчетные зависимости для эквивалентной диэлектрической проницаемости микросфер, а затем и расчетные формулы для эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика в целом. Количественный анализ полученных соотношений подтвердил адекватность построенных математических моделей. Эти соотношения могут быть применены для прогноза эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика по известным характеристикам микросфер и связующего

Ключевые слова: сферопластик; микросфера; эквивалентная диэлектрическая проницаемость микросферы; эффективная диэлектрическая проницаемость сферопластика

Введение

Композиционные материалы с матрицей из полимерных и кремнийорганических связующих, армированные полыми шаровыми включениями (микросферами), принято называть сферопластиками. Распространенным материалом микросфер является стекло, но применяют и керамические, углеродные и полимерные микросферы, имеющие диаметр порядка миллиметра и толщину стенки в несколько микрометров [1, 2]. Малые плотность и теплопроводность и достаточно высокие механические свойства сферопластиков определили их широкое использование в качестве легких и прочных теплоизоляционных материалов. Но подбор материалов микросфер и связующего позволяет создавать сферопластики с необходимыми свойствами применительно к различным областям техники [3, 4], в том числе с диэлектрическими характеристиками, которыми должны обладать конструкционные материалы разнообразных радиотехнических устройств и объектов [5, 6, 7].

Для создания сферопластиков с заданными диэлектрическими свойствами необходимо располагать математическими моделями, позволяющими описывать механическое и электрическое взаимодействие микросфер и связующего и строить расчетные зависимости для оценки диэлектрической проницаемости сферопластика, которую можно получить при использовании различных сочетаний материалов микросфер и связующего. Такие модели могут быть построены с привлечением основных положений механики и электродинамики [8, 9, 10, 11].

В данной работе построен вариант математической модели, представляющей сферопластик в виде сочетания четырех фаз: однородного материала с искомой эффективной диэлектрической проницаемостью и взаимодействующего с представительным элементом структуры сферопластика, состоящим, в свою очередь, из шарового слоя связующего, поллой микросферы и ее наполнения. Для гарантированной двусторонней оценки возможных значений эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика к этой модели применена двойственная вариационная формулировка задачи электростатики в неоднородной сплошной среде, включающая два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), достигающих на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений. Переходом от исходной четырехфазной модели структуры сферопластика к более простой трехфазной удалось вывести расчетные зависимости для эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы, а затем и расчетные формулы для эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика в целом. Количественный анализ этих зависимостей подтвердил адекватность построенных математических моделей для описания механического и электрического взаимодействия элементов структуры сферопластика и достоверность определяемого полученными расчетными зависимостями прогноза эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика.

1. Постановка задачи электростатики в неоднородной сплошной среде

Из полной системы уравнений Максвелла [9] вытекают уравнения электростатики в виде [12]

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (1)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; \mathbf{E} и \mathbf{D} — векторы напряженности электростатического поля и электрического смещения (электрической индукции) соответственно; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; ρ_e — объемная плотность свободных электрических зарядов, которую в дальнейшем примем равной нулю. Первое уравнение (1) можно удовлетворить тождественно, если ввести соотношением

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (2)$$

скалярный электрический потенциал U . Для изотропной среды векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} коллинеарны и связаны равенством [9]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость (для вакуума $\varepsilon = 1$, а для диэлектриков $\varepsilon > 1$), $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{М}}{\text{В}}$ — электрическая постоянная. Далее слово «относительная» для краткости будет опущено.

Изотропную сплошную среду в области V считаем неоднородной, т.е. диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(M)$ этой среды зависит от положения точки $M \in V$ в этой области. Тогда из второго уравнения (1) и формул (2) и (3) при $\rho_e(M) \equiv 0 (M \in V)$ получим дифференциальное уравнение [12]

$$\nabla \cdot (\varepsilon(M) \nabla U(M)) = 0. \quad (4)$$

Для однозначного решения уравнения (4) в точках $N \in S$ поверхности S , ограничивающей область V , необходимо сформулировать граничные условия. На неконтактирующих между собой участках S_1 и S_0 этой поверхности зададим значения

$$U(N) = U_1 > 0, \quad N \in S_1; \quad U(N) = 0, \quad N \in S_0 \quad (5)$$

электрического потенциала, а остальную часть $S_* = S \setminus (S_1 \cup S_0)$ поверхности области примем идеально электроизолированной, т.е.

$$\varepsilon(N) \mathbf{n}(N) \cdot \nabla U(N) = 0, \quad N \in S_*, \quad (6)$$

где $\mathbf{n}(N)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_* в точке $N \in S_*$.

2. Двойственная вариационная формулировка задачи электростатики

Формулировке задачи электростатики в виде дифференциального уравнения (4) с граничными условиями (5) и (6) можно поставить в соответствие вариационную формулировку [8, 13], содержащую функционалы с определенными экстремальными свойствами. Сначала рассмотрим путь построения минимизируемого функционала [14].

Равенство (6) умножим на вариацию $\delta U(N)$ ($N \in S_*$) и проинтегрируем это произведение по идеально электроизолированному участку S_* поверхности S , ограничивающей рассматриваемую область V , а произведение уравнения (4) и вариации $\delta U(M)$ ($M \in V$) проинтегрируем по этой области. Каждый из полученных интегралов равен нулю. Поэтому и их разность также будет равна нулю, т.е.

$$\int_{S_*} (\varepsilon(N) \mathbf{n}(N) \cdot \nabla U(N)) \delta U(N) dS(N) - \int_V (\nabla \cdot (\varepsilon(M) \nabla U(M))) \delta U(M) dV(M) = 0.$$

Преобразуем второй интеграл в соответствии с первой формулой Грина [15] (обозначения точек опущены)

$$\int_V (\nabla \cdot (\varepsilon \nabla U)) \delta U dV = \int_S \varepsilon \mathbf{n} \cdot (\nabla U) \delta U dS - \int_V \varepsilon \nabla U \cdot \nabla (\delta U) dV. \quad (7)$$

и учтем, что вариация $\delta U(N) \equiv 0$ ($N \in S_U$) на участках $S_U = S_1 \cup S_0$ поверхности S , поскольку на этих участках значения электрического потенциала заданы. Тогда в итоге получим равенство

$$\delta \int_V \frac{\varepsilon(M)}{2} (\nabla U(M))^2 dV(M) = 0,$$

которое является условием стационарности функционала

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(M) (\nabla U(M))^2 dV(M). \quad (8)$$

Функционал (8) допустимо рассматривать на множестве непрерывных в области V и кусочно дифференцируемых в ней функций $U(M)$, $M \in V$, принимающих на участках S_0 и S_1 поверхности S заданные значения электрического потенциала. Этот функционал на множестве допустимых функций является строго выпуклым (вниз) [8, 16], т.е. существует единственная функция $U^*(M)$, $M \in \bar{V}$, определенная в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$, которая является стационарной точкой функционала (8), соответствующей его наименьшему значению $J[U^*]$. В случае достаточной гладкости функции $U^*(M)$ она будет удовлетворять дифференциальному уравнению (4) и граничному условию (6).

Подынтегральная функция в соотношении (8) пропорциональна объемной плотности энергии электростатического поля в области V , а значение интеграла пропорционально суммарной энергии W условного электрического конденсатора с неоднородным диэлектриком в объеме области V , заключенным между двумя электродами на участках S_1 и S_0 поверхности этой области с заданными электрическими потенциалами U_1 и $U_0 = 0$ соответственно. Введя емкость C такого конденсатора, для стационарной точки функционала (8) можно записать

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon(M) (\nabla U^*(M))^2 dV(M) = \frac{C}{2} U_1^2.$$

Для построения функционала, альтернативного по отношению к функционалу (8) и достигающего в стационарной точке наибольшего значения, равного $J[U^*]$, расширим область определения функционала (8) путем введения векторной функции \mathbf{D} , удовлетворяющей дополнительному условию

$$\mathbf{D}(M) + \varepsilon(M)\varepsilon_0 \nabla U(M) = \mathbf{0}, \quad M \in \bar{V}. \quad (9)$$

Отсюда получим $\nabla U(M) = -\mathbf{D}(M)/\varepsilon(M)$ и после подстановки в функционал (8) запишем

$$J[U, \mathbf{D}] = \frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{D}(M))^2}{\varepsilon(M)\varepsilon_0^2} dV(M), \quad (10)$$

а затем при помощи векторного множителя Лагранжа \mathbf{L} введем условие (9) в соотношение

$$J[U, \mathbf{D}, \mathbf{L}] = J[U, \mathbf{D}] - \int_V (\mathbf{D}(M) + \varepsilon(M)\varepsilon_0 \nabla U(M)) \cdot \mathbf{L}(M) dV(M). \quad (11)$$

Равенство нулю вариации функционала (11) с учетом ее преобразования по первой формуле Грина вида (7) (обозначение точек опущено)

$$\delta J[U, \mathbf{D}, \mathbf{L}] = \int_V \left((\mathbf{D} - \mathbf{L}) \cdot \delta \mathbf{D} - (\mathbf{D} + \varepsilon \varepsilon_0 \nabla U) \cdot \delta \mathbf{L} + \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{L} \delta U \right) dV - \int_{S_*} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) \delta U dS = 0$$

приводит к условиям стационарности этого функционала, в которые помимо условия (9) входят равенства

$$\mathbf{L}(M) = \mathbf{D}(M); \quad \nabla \cdot \mathbf{L}(M) = 0, \quad M \in V; \quad \mathbf{L}(N) \cdot \mathbf{n}(N) = 0, \quad N \in S_*.$$

Используя эти равенства и соотношения (8), (10) и (11), приходим к функционалу

$$J'[U, \mathbf{D}] = J[U] - \frac{1}{2} \int_V \left(\mathbf{D}(M) + \varepsilon(M) \varepsilon_0 \nabla U(M) \right)^2 dV \quad (12)$$

с дополнительными условиями (5) и условиями стационарности (9) и

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(M) = 0 \quad \forall M \in V; \quad \mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{n}(N) = 0, \quad N \in S_*. \quad (13)$$

Из соотношения (12) следует, что $J'[U, \mathbf{D}] \leq J[U]$, а при выполнении условия стационарности (9) стационарные значения этих функционалов совпадают: $J'[U^*, \mathbf{D}^*] = J[U^*]$, причем

$$\mathbf{D}^*(M) = -\varepsilon(M) \varepsilon_0 \nabla U^*(M), \quad M \in \bar{V}. \quad (14)$$

Если потребовать выполнения условий стационарности (13) в качестве дополнительных, то после преобразования функционала (12) с учетом функционала (8) и его дополнительного условия (5) получим

$$I[\mathbf{D}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{D}(M))^2}{\varepsilon(M) \varepsilon_0^2} dV(M) - \frac{U_1}{\varepsilon_0} \int_{S_1} \mathbf{n}(N) \cdot \mathbf{D}(N) dS. \quad (15)$$

Функционал (15) допустимо рассматривать на множестве непрерывно дифференцируемых в области V векторных функций $\mathbf{D}(M)$, $M \in V$, удовлетворяющих указанным выше дополнительным условиям, одно из которых совпадает со вторым уравнением (1), и интегрируемых на участках S_* поверхности S . Этот функционал является строго выпуклым вверх [8, 16] и в стационарной точке $\mathbf{D}^*(M)$ ($M \in V \cup S_D$) достигает наибольшего значения $I[\mathbf{D}^*]$, совпадающего со значением $J[U^*]$.

Альтернативные функционалы (8) и (15) в сочетании с цепочкой неравенств

$$J[U] \geq J[U^*] = I[\mathbf{D}^*] \geq I[\mathbf{D}] \quad (16)$$

составляют двойственную вариационную формулировку задачи электростатики в неоднородном диэлектрике. Использование этой формулировки позволяет установить двусторонние границы, между которыми должны быть расположены эффективные значения характеристик такого диэлектрика, а также количественно оценить интегральную погрешность, возникающую при приближенном решении указанной задачи. В частности, соотношение (16) в сочетании с формулой (10) дает возможность получить двусторонние оценки емкости C условного конденсатора, соответствующего области V с неоднородным диэлектриком.

3. Представительный элемент структуры сферопластика

Структуру сферопластика представим как совокупность составных частиц шаровой формы с наружным радиусом R_1 . Каждая из этих частиц включает шаровой слой связующего и микросферу с внутренним R_0 и наружным $R = R_1 C_V^{1/3}$ радиусами, где C_V — объемная концентрация микросфер в сферопластике. Условно примем, что значение R_1 может изменяться от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет рассматривать сферопластик как сплошную среду и считать, что $C_V \in [0; 1]$.

Значение ε° диэлектрической проницаемости для большинства используемых в сферопластиках связующих лежит в интервале $3,5 \dots 5,0$ [1, 6, 17, 18]. Для материалов, применяемых при изготовлении микросфер, значение электрической проницаемости ε_0 может изменяться в достаточно широких пределах. Например, для кварцевого стекла оно составляет 3,75, а для свинцового силиката, содержащего 20% PbO — 16,2, причем ε_0 пропорционально плотности ρ в кг/м³ с коэффициентом около 2,4 [19]. С увеличением температуры диэлектрическая проницаемость стекла в интервале $293 \dots 403$ К возрастает лишь на $3 \dots 10\%$, но с ростом температуры от 600 К до 1000 К удваивает свое значение [19, 20]. При кристаллизации стекол в силу упорядочивания структуры диэлектрическая проницаемость уменьшается (например, для боросиликатного стекла от 9,8 до 6,5).

Если в шаровой полости микросферы находится одноатомный или двухатомный газ, то его диэлектрическую проницаемость можно считать равной единице. В патентной литературе описаны способы получения микросфер на основе поливинилхлорида ($\varepsilon_0 = 4$) и полиметилметакрилата ($\varepsilon_0 = 3,6$), содержащих четыреххлористый углерод и другие низкокипящие жидкости с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon' = 2,26 - 2,78$ [21].

Таким образом, модель структуры сферопластика включает четыре фазы: однородный материал с искомой эффективной диэлектрической проницаемостью ε сферопластика, связующее, материал полого шарового включения и наполнение микросферы с диэлектрической проницаемостью ε' . Примем, что рассмотренная составная шаровая частица является представительным элементом структуры сферопластика. Основное свойство этого элемента состоит в предположении, что его замена равновеликим шаром с диэлектрической проницаемостью ε не вызывает возмущения электростатического поля в массиве однородного материала. Это допущение дает возможность использовать двойственную вариационную формулировку задачи электростатики в содержащей неоднородный материал замкнутой области для построения двусторонних оценок значения ε .

4. Двусторонние оценки эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика

Замкнутую область \bar{V} представим в виде прямого цилиндра высотой $H \gg R_1$ с идеально теплоизолированной боковой поверхностью и заданными на каждом из оснований

площадью $F \gg \pi R_1^2$ значениями электрических потенциалов $U_0 = 0$ и $U_1 > 0$. Диаметральное поперечное сечение представительного элемента структуры сферопластика совместим с основанием цилиндра, имеющим нулевое значение электрического потенциала, т.е. область \bar{V} будет содержать половину этого элемента. Остальная часть этой области будет занята однородным материалом с искомым значением ε диэлектрической проницаемости. В качестве допустимого для функционала (8) примем линейное по высоте цилиндра распределение электрического потенциала с постоянной составляющей $G = U_1/H$ вектора градиента. Тогда из формулы (8) получим

$$J_1[G] = \varepsilon G^2 \left(\frac{HF}{2} - \frac{\pi R_1^3}{3} \right) + \pi G^2 \frac{\varepsilon^\circ (R_1^3 - R^3) + \varepsilon_0 (R^3 - R_0^3) + \varepsilon' R_0^3}{3}. \quad (17)$$

Для функционала (15) простейшим допустимым распределением вектора электрического смещения \mathbf{D} является постоянное значение $D = -\varepsilon \varepsilon_0 G$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В этом случае формула (15) примет вид

$$I_1[G] = -\varepsilon G^2 \left(\frac{HF}{2} - \frac{\pi R_1^3}{3} \right) - \pi \frac{(\varepsilon G)^2}{2} \left(\frac{R_1^3 - R^3}{3\varepsilon^\circ} + \frac{R^3 - R_0^3}{3\varepsilon_0} + \frac{R_0^3}{\varepsilon'} \right) + \varepsilon G^2 HF. \quad (18)$$

Принятые допустимые распределения электрического потенциала и вектора электрического смещения для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения $J_1[G]$ и $I_1[G]$ не будут совпадать, но будут удовлетворять соотношению (16), причем $J_1[G] > I_1[G]$. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = \varepsilon G^2 HF/2$ функционала (8) для однородной области с диэлектрической проницаемостью ε , поскольку замена половины представительного элемента структуры композита равновеликим объемом однородного материала не вызовет возмущения в принятом линейном распределении электрического потенциала, которое в этом случае будет соответствовать истинному распределению $U^*(M)$ ($M \in \bar{V}$) в рассматриваемой замкнутой области. Тогда с учетом соотношения (17) из условия $J_1[G] \geq J_0$ получим для отношения $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon^\circ$ верхнюю оценку

$$\tilde{\varepsilon}_+ = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon^\circ} = 1 - C_V + C_V \bar{\varepsilon}_+^* \geq \tilde{\varepsilon}, \quad (19)$$

где $\bar{\varepsilon}_+^* = \varepsilon_+^*/\varepsilon^\circ = \bar{\varepsilon}_0 + (\bar{\varepsilon}' - \bar{\varepsilon}_0)C_0$, $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/\varepsilon^\circ$, $\bar{\varepsilon}' = \varepsilon'/\varepsilon^\circ$ и $C_0 = (R_0/R)^3$ — пористость микросфер, а при использовании формулы (18) из условия $I_1[G] \leq J_0$ найдем нижнюю оценку

$$\tilde{\varepsilon}_- = \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon^\circ} = \frac{1}{1 - C_V + C_V/\bar{\varepsilon}_-^*} \leq \tilde{\varepsilon}, \quad (20)$$

где

$$\bar{\varepsilon}_-^* = \frac{\varepsilon_-^*}{\varepsilon^\circ} = \frac{1}{1/\bar{\varepsilon}_0 + (1/\bar{\varepsilon}' - 1/\bar{\varepsilon}_0)C_0}.$$

Отметим, что формулу для $\tilde{\varepsilon}_+$ можно получить с применением теории смесей [22]. Однако из этой теории в отличие от использованной двойственной вариационной формулировки, содержащей функционалы (8) и (15), не следует, что $\tilde{\varepsilon}_+$ является верхней оценкой значения $\tilde{\varepsilon}$.

Значения ε_+^* и ε_-^* можно рассматривать как соответственно верхнюю и нижнюю оценки некоторой эквивалентной диэлектрической проницаемости ε^* микросферы при ее замене равновеликим сплошным шаром радиусом R .

5. Эквивалентный коэффициент диэлектрической проницаемости микросферы

Рассмотрим взаимодействие отдельно взятой микросферы с внутренним R_0 и наружным R радиусами и окружающего ее однородного материала с диэлектрической проницаемостью ε° связующего сферопластика. Центр полого шара поместим в начале сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии r от начала координат задан модуль G вектора градиента электростатического поля в однородном материале. Этот вектор направим по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчет угловой координаты θ . Тогда при $r \rightarrow \infty$ распределение электрического потенциала в этом материале будет описывать функция $U_\infty(r, \theta) = U_0 + Gr \cos \theta$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, имеющего в сферических координатах вид [15]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (21)$$

В данном случае благодаря параллельности заданного вектора градиента электростатического поля оси отсчета угловой координаты θ распределение электрического потенциала симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты φ , т.е. $\partial^2 U_\infty / \partial \varphi^2 \equiv 0$.

При приближении к микросфере возникает возмущение электростатического поля в однородном материале, описываемое также удовлетворяющим уравнению (21) дополнительным слагаемым $\Delta U(r, \theta) = (B^\circ / r^2) \cos \theta$ [23], где B° — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, электростатическое поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (21), описывает функция

$$U^\circ(r, \theta) = U_\infty(r, \theta) + \Delta U(r, \theta) = U_0 + \left(Gr + \frac{B^\circ}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (22)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения электрического потенциала в шаровом слое микросферы

$$U(r, \theta) = U_0 + \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta \quad (23)$$

и в шаровой полости

$$U'(r, \theta) = U_0 + \left(A'r + \frac{B'}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (24)$$

причем в силу ограниченности значения электрического потенциала при $r = 0$ в соотношении (24) $B' \equiv 0$.

В равенства (22)–(24) входят 4 неизвестных коэффициентов, которые необходимо найти из четырех граничных условий на сферических поверхностях с радиусами R_0 и R , определяющих непрерывность на этих поверхностях распределения электрического потенциала

и радиальной составляющей вектора электрического смещения. Из граничных условий на сферической поверхности радиусом R_0 с учетом равенств $B' \equiv 0$, (23) и (24) получим

$$A' = A + \frac{B}{R_0^3}, \quad A' = \left(A - \frac{2B}{R_0^3} \right) \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{\varepsilon}'}$$

Отсюда, исключая коэффициент A' , находим

$$A = \frac{B}{R_0^3} \frac{2 + \tilde{\lambda}'}{1 - \tilde{\lambda}'}, \quad (25)$$

где $\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}'/\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon'/\varepsilon_0$. Граничные условия на сферической поверхности радиусом R с учетом равенств (22) и (23) имеют вид

$$A + \frac{B}{R^3} = A^\circ + \frac{B^\circ}{R^3}, \quad \left(A - \frac{2B}{R^3} \right) \bar{\varepsilon}_0 = A^\circ - \frac{2B^\circ}{R^3}. \quad (26)$$

Заменим полую микросферу сплошным шаром радиусом R с эквивалентным значением ε^* диэлектрической проницаемости, при котором коэффициенты A° и B° в формулах (26) сохраняют свои значения. При такой замене распределение электрического потенциала в сплошном шаре вместо равенства (23) будет определять зависимость $U^* = U_0 + A^*r \cos \theta$, а граничные условия (26) следует заменить равенствами

$$A^* = A^\circ + \frac{B^\circ}{R^3}, \quad A^* \bar{\varepsilon}^* = A^\circ - \frac{2B^\circ}{R^3},$$

где $\bar{\varepsilon}^* = \varepsilon^*/\varepsilon^\circ$. Тогда с учетом равенств (26) запишем

$$\left(A^\circ + \frac{B^\circ}{R^3} \right) \bar{\varepsilon}^* = A^\circ - \frac{2B^\circ}{R^3} = \left(A - \frac{2B}{R^3} \right) \bar{\varepsilon}_0 = \left(A + \frac{B}{R^3} \right) \bar{\varepsilon}^*.$$

Отсюда, используя формулу (25), для эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы находим

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0} = \frac{2 + \tilde{\varepsilon}' - 2(1 - \tilde{\varepsilon}')C_0}{2 + \tilde{\varepsilon}' + (1 - \tilde{\varepsilon}')C_0}. \quad (27)$$

В безразмерных параметрах $\bar{\varepsilon}_+^*$ и $\bar{\varepsilon}_-^*$, входящих в формулы (19) и (20), изменим нормировку, получив двусторонние оценки $\bar{\varepsilon}_+^* = 1 + (\tilde{\varepsilon}' - 1)C_0$ и $\bar{\varepsilon}_-^* = (1 + (1/\tilde{\varepsilon}' - 1)C_0)^{-1}$ для безразмерной величины $\bar{\varepsilon}^*$ эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы. На рис. 1 приведены графики зависимостей от C_0 верхней $\bar{\varepsilon}_+^*$ (штрихпунктирные линии) и нижней $\bar{\varepsilon}_-^*$ (штриховые линии) оценок определяемой формулой (27) величины $\bar{\varepsilon}^*$ (сплошные кривые) для значений $\tilde{\varepsilon}'$, равных ординатам кривых при $C_0 = 1$. Видно, что все кривые для $\bar{\varepsilon}^*$ расположены в пределах границ, определяемых соответствующими двусторонними оценками. При $C_0 = 0$ и $C_0 = 1$ двусторонние оценки совпадают с соответствующим значением $\bar{\varepsilon}^*$, но по мере отклонения параметра C_0 от этих значений разность $\Delta \bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon}_+^* - \bar{\varepsilon}_-^*$ возрастает, достигая наибольшего значения $(1 - \sqrt{\tilde{\varepsilon}'})^2$ при $C_0 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}'}/(1 + \sqrt{\tilde{\varepsilon}'})$.

Величину $\beta^* = \Delta \bar{\varepsilon}^*/(\bar{\varepsilon}_+^* + \bar{\varepsilon}_-^*)$ следует рассматривать как наибольшую возможную относительную погрешность, которая может возникнуть при выборе для микросферы в качестве $\bar{\varepsilon}^*$ полусуммы двусторонних оценок. На рис. 2 представлены графики зависимости β^* от C_0 для некоторых значений $\tilde{\varepsilon}' = 1/\tilde{\varepsilon}'$, причем эти графики симметричны относительно вертикальной прямой с абсциссой $C_0 = 0,5$.

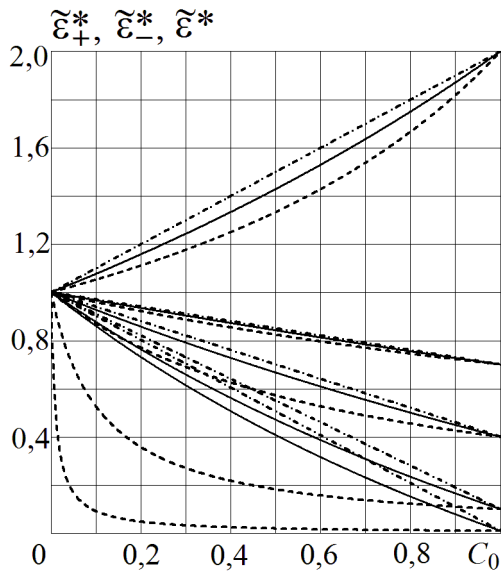


Рис. 1. Двусторонние границы областей расположения значений эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы

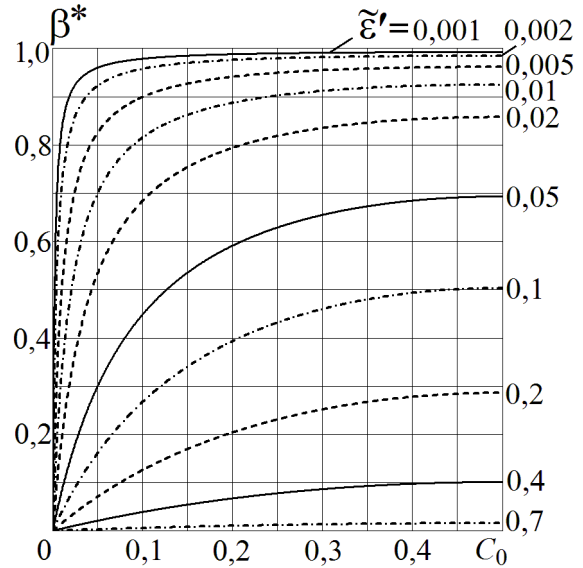


Рис. 2. Зависимость наибольшей возможной относительной погрешности эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы от ее пористости при различных значениях параметра $\tilde{\epsilon}'$

6. Эффективный коэффициент диэлектрической проницаемости сферопластика

Проведенная выше замена полый микросферы сплошным шаром с эквивалентной диэлектрической проницаемостью ϵ^* позволяет от исходной четырехфазной модели структуры сферопластика перейти к трехфазной модели с представительным элементом в виде такого шара радиусом R , покрытым шаровым слоем связующего с наружным радиусом R_1 . Если провести построение двусторонних оценок для трехфазной модели структуры сферопластика, то вместо формул (19) и (20) получим соответственно

$$\tilde{\epsilon}_+ = \frac{\epsilon_+}{\epsilon^o} = 1 + (\bar{\epsilon}^* - 1)C_V \geq \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon}_- = \frac{\epsilon_-}{\epsilon^o} = \frac{1}{1 + (1/\bar{\epsilon}^* - 1)C_V} \leq \tilde{\epsilon}. \quad (28)$$

Эти оценки аналогичны двусторонним оценкам для величины $\bar{\epsilon}^*$ эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы. Поэтому для нахождения наибольшей возможной относительной погрешности $\beta = \frac{\tilde{\epsilon}_+ - \tilde{\epsilon}_-}{\tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-}$, возникающей при выборе в качестве значения $\tilde{\epsilon}$ полусуммы двусторонних оценок, определяемых соотношениями (28), можно использовать рис. 2 с заменой β^* на β , C_0 на C_V и $\tilde{\epsilon}'$ на $\bar{\epsilon}^*$.

Для трехфазной модели известно решение задачи о тепловом взаимодействии аналогичного представительного элемента с неограниченным массивом однородного материала λ [24], совпадающее по структуре с искомым решением для эффективного коэффициента диэлектрической проницаемости сферопластика и принимающее вид

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon^o} = \left(2 + \bar{\epsilon}^* - 2(1 - \bar{\epsilon}^*)C_V\right) \left(2 + \bar{\epsilon}^* + (1 - \bar{\epsilon}^*)C_V\right), \quad (29)$$

аналогичный формуле (27). Это дает возможность после замен на рис. 1 $\tilde{\varepsilon}^*$ на $\tilde{\varepsilon}$, C_0 на C_V и $\tilde{\varepsilon}'$ на $\tilde{\varepsilon}^*$ использовать данный рисунок для анализа влияния параметров C_V и $\tilde{\varepsilon}^*$ на величину $\tilde{\varepsilon}$. Необходимо отметить, что формулу (29) можно преобразовать к виду, совпадающему с известной формулой Максвелла для среды с дисперсными шаровыми включениями, приведенной в работе [25] и полученной на основе двухфазной модели, состоящей из включения в виде сплошного шара с диэлектрической проницаемостью ε^* и окружающей его среды с диэлектрической проницаемостью ε° , заполняющей неограниченную область.

Помимо соотношения (29) для вычисления эффективного значения диэлектрической проницаемости сферопластика можно использовать приближенную формулу [9, 26], получаемую осреднением свойств смеси из микросфер и частиц связующего,

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon^\circ \approx \left(1 - C_V + (\tilde{\varepsilon}^*)^{1/3}\right)^3, \quad (30)$$

или соотношение

$$\ln \tilde{\varepsilon}_2 = C_V \ln \tilde{\varepsilon}^*, \quad (31)$$

следующее из формулы Лихтенекера [6, 19]. Возможный подход к расчету эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика связан также с применением метода само-согласования [27], приводящего к расчетной зависимости

$$\tilde{\varepsilon}_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon^\circ} = \frac{1}{4} \left(1 - (1 - \tilde{\varepsilon}^*)(1 - 3C_V) + \sqrt{(1 - (1 - \tilde{\varepsilon}^*)(1 - 3C_V))^2 + 8\tilde{\varepsilon}^*}\right). \quad (32)$$

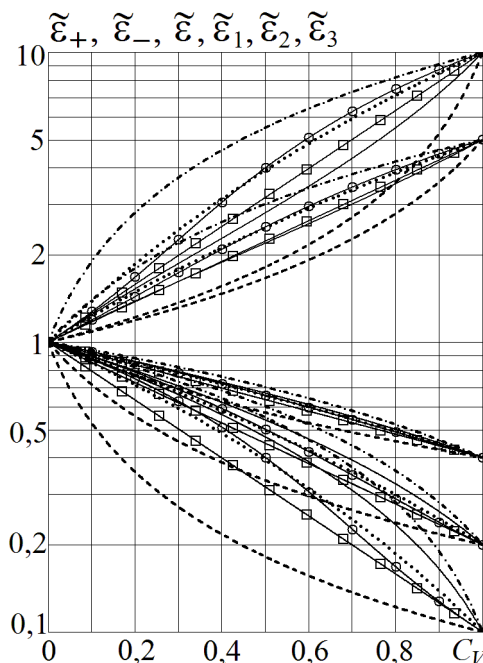


Рис. 3. Двусторонние границы областей расположения значений эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика, рассчитанных по формулам (29)–(32)

На рис. 3 в полулогарифмических координатах представлены построенные с использованием соотношений (28)–(32) графики зависимостей от C_V двусторонних оценок $\tilde{\varepsilon}_+$

и $\tilde{\varepsilon}_-$ (штрихпунктирные и штриховые линии соответственно), $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$ и $\tilde{\varepsilon}_3$ (соответственно сплошные кривые, пунктирные линии, сплошные кривые со светлыми квадратами и кружками) при различных значениях параметра $\tilde{\varepsilon}^*$ (каждая кривая соответствует значению $\tilde{\varepsilon}^*$, равному ординате этой кривой при $C_V = 1$). Все графики, определяемые расчетными зависимостями (29)–(32), не выходят за границы областей, определяемых соответствующими линиями для двусторонних оценок. Следовательно, математические модели, использованные для построения этих зависимостей, можно считать в первом приближении адекватно описывающими диэлектрические характеристики сферопластика.

Заключение

Двойственная вариационная формулировка задачи электростатики в неоднородной сплошной среде, содержащая два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), достигающих на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений, позволила установить гарантированные двусторонние границы области параметров, в которой находятся истинные значения эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика. Путем перехода от исходной четырехфазной модели структуры сферопластика к более простой трехфазной получены расчетные зависимости для эквивалентной диэлектрической проницаемости микросферы, а затем и расчетные формулы для эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика, количественный анализ которых подтвердил адекватность построенных математических моделей. Полученные соотношения могут быть применены для прогноза эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика по известным характеристикам микросфер и связующего.

Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 по государственному заданию № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

Список литературы

1. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология / Под ред. А.А. Берлина. СПб.: Профессия, 2011. 560 с.
2. Наполнители для полимерных композиционных материалов: Справочное пособие / Пер. с англ. под ред. П.Г. Бабаевского. М.: Химия, 1981. 736 с.
3. Ушков С.С., Николаев Г.И., Михайлов В.И., Матвеев Г.В., Хесин Ю.Д. Конструкционные материалы для глубоководных аппаратов // Судостроение. 2004. № 5. С. 111–114.
4. Соколов И.И., Долматовский М.Г. Сферопластики // Полимерные материалы. 2005. № 9. С. 20–21.

5. Селиванов О.Г., Михайлов В.А. Теплоизоляционные синтактовые материалы на основе термостойкого кремнийорганического полимера // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 7. С. 12–13.
6. Михайлов В.А. Синтактные материалы с высокими диэлектрическими свойствами на основе кремнийорганического полимера // Успехи современного естествознания. 2015. № 12. С. 47–50.
7. Погосян М.А., Барковский А.Ф., Рожков А.И., Поляков Ю.Г., Господарский С.А. Антенный обтекатель, способ его изготовления и способ изготовления слоя антенного обтекателя: Патент РФ № 2186444, 2002.
8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
10. Зарубин В.С. Моделирование. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 336 с.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1(1). С. 5–17. DOI: [10.18698/2309-3684-2014-1-517](https://doi.org/10.18698/2309-3684-2014-1-517)
12. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 232 с.
13. Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
14. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
15. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 700 с.
16. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 488 с.
17. Медведев А.М. Печатные платы. Конструкции и материалы. М.: Техносфера, 2005. 304 с.
18. Чухланов В.Ю., Сысоев Э.П. Диэлектрические характеристики синтактных материалов на основе полых керамических микросфер с кремнийорганическими связующими // Стекло и керамика. 2004. № 6. С. 19–20.
19. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
20. Применко В.И. Влияние состава на теплопроводность стекла / В сб. Вопросы химии и химической технологии. Вып. 62. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981. С. 72–74.

21. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
22. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов, Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
23. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Пугачев О.В. Оценки электрофизических характеристик композита с диэлектрической матрицей и дисперсными проводящими включениями // Радиооптика. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2015. №3. С. 51–67. DOI: [10.7463/rdopt.0315.0800066](https://doi.org/10.7463/rdopt.0315.0800066)
24. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
25. Maxwell C. Treatise on electricity and magnetism. In 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1873.
26. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. No 3. С. 50-64. DOI: [10.18698/0236-3933-2015-3-50-64](https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-3-50-64)
27. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2013. №9. С. 435–444. DOI: [10.7463/0913.0601512](https://doi.org/10.7463/0913.0601512)

The Spheroplastic Permittivity Estimates

Zarubin V. S.^{1,*}, Kuvyrkin G. N.¹, Savel'eva I. Yu.¹

* fn2@bmstu.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: spheroplastic, microsphere, the equivalent permittivity of the microsphere, effective permittivity of the spheroplastic

The composite materials with a matrix from polymer and silicone binders, reinforced by the hollow spherical inclusions (microspheres) are commonly referred to as spheroplastics. A widespread microsphere material is glass, but, it is also possible to use ceramic, carbon, and polymeric microspheres having a diameter within a millimeter and a wall thickness of several micrometers. Low density and thermal conductivity and sufficiently high mechanical properties of the spheroplastics decided their widespread use as the light and strong thermal insulation materials. But a selection of the microsphere and binder materials allows us to create the spheroplastics with appropriate properties to be used in variety of technology domains, including those with dielectric properties, which the structural materials of various wireless devices and objects should have.

To create the spheroplastic with specified dielectric properties it is necessary to have a mathematical model allowing us to describe the mechanical and electrical interaction of the microspheres and binder and build the calculated relationships to estimate a spheroplastic permittivity, which can be obtained when using the various combinations of microsphere materials and binder. Such models can be built involving the essentials of mechanics and electrodynamics

The paper offers a constructed mathematical model to represent the spheroplastic as a combination of four phases: a homogeneous material with the desired effective permittivity and a spheroplastic interacting with the representative structure element consisting, in turn, of a ball bonding layer, a hollow microsphere and and its filling. To ensure a two-sided estimate of the possible values of spheroplastic effective permittivity this model uses a dual variational formulation of electrostatic problems in nonhomogeneous continuum, including two alternative functionals (minimized and maximized), reaching the matching extreme values to true solution. The transition from the initial four-phase model of the spheroplastic structure to the simple three-phase one enabled us to derive the calculated relationships for the equivalent permittivity of microspheres, and then also the calculating formulas for effective permittivity of the spheroplastic as a whole. A quantitative analysis of these relationships proved the adequacy of the constructed mathematical

models to describe the interaction between mechanical and electrical elements of the structure and the predicted accuracy of the effective spheroplastic permittivity determined owing to calculated dependences.

References

1. Berlin A.A., ed. *Polimernye kompozitsionnye materialy: struktura, svoistva, tekhnologiya* [Polymeric composites: structure, properties, technology]. Sankt-Peterburg, Professii Publ., 2011. 560 p. (in Russian).
2. Babayevsky P.G., ed. *Napolniteli dlya polimernykh kompozitsionnykh materialov* [Fillers for polymeric composite materials]. Moscow, Khimiia Publ., 1981. 736 p. (in Russian).
3. Ushkov S.S., Nikolaev G.I., Mikhailov V.I., Matveev G.V., Khesin Yu.D. Structural materials for deep-water submersibles. *Sudostroenie = Shipbuilding*, 2004, no. 5, pp. 111–114. (in Russian).
4. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G. Spheroplastics. *Polimernye materialy = Polymer materials*, 2005, no. 9, pp. 20–21. (in Russian).
5. Selivanov O.G., Mikhailov V.A. Insulation syntakt materials based on thermal stability of silicone polymers. *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy = International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2014, no. 7, pp. 12–13. (in Russian).
6. Mikhailov V.A. Syntactic materials with high dielectric properties based on silicone polymer. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniia = Advances in current natural sciences*, 2015, no. 12, pp. 47–50. (in Russian).
7. Poghosyan M.A., Barkovskii A.F., Rozhkov A.I., Polyakov Yu.G., Gospodarskii S.A. *Antennyy obtekatel', sposob ego izgotovleniya i sposob izgotovleniya sloya antennogo obtekatelya* [Antenna radome: its manufacturing method and a method for manufacturing antenna radome layer]. Patent RF no. 2186444, 2002.
8. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elekhnjdinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of continuum mechanics and electrostatics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 664 p. (in Russian).
10. Zarubin V.S. *Modelirovanie* [Modeling]. Moscow, “Academia” Publishing Center, 2013. 336 p. (in Russian).
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Features of mathematical modeling of technical devices. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody = Mathematical simulation and numerical methods*, 2014, no. 1(1), pp. 5–17. DOI: [10.18698/2309-3684-2014-1-517](https://doi.org/10.18698/2309-3684-2014-1-517) (in Russian).

12. Tolmachev V.V., Golovin A.M., Potapov V.S. *Termodinamica i elektrodinamica sploshnoi sredy* [Thermodynamics and electrodynamic continuous medium]. Moscow, MGU Publ., 1988. 232 p. (in Russian).
13. Zarubin V.S., Selivanov V.V. *Variatsionnye i chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational and numerical methods of continuum mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1993. 360 p. (in Russian).
14. Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplonapryazhennykh konstruksiy* [Calculation of heat-stressed designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p. (in Russian).
15. Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennyye metody matematicheskoi fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 700 p. (in Russian).
16. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* [Calculus of variations and optimal control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 488 p. (in Russian).
17. Medvedev A.M. *Pechatnye platy. Konstruksii i materialy* [Printed circuit boards. Structures and materials]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2005. 304 p. (in Russian).
18. Chukhlanov V.Yu., Sysoev E.P. Dielectric characteristics of syntact materials based on hollow ceramic microspheres with organosilicon binders. *Steklo i keramika*, 2004, no. 6, pp. 19–20. (English version of journal: *Glass and ceramics*, 2004, vol. 61, no. 5, pp. 190–191. DOI: [10.1023/B:GLAC.0000043090.07100.67](https://doi.org/10.1023/B:GLAC.0000043090.07100.67)).
19. Tareev B.M. *Fizika dielektricheskikh materialov* [Physics of dielectric materials]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 320 p. (in Russian).
20. Primenko V.I. Influence of structure on the thermal conductivity of glass. *Voprosy khimii I khimicheskoi tekhnologii* [Chemistry and chemical technology questions], 1981, vol. 62, pp. 72–74. (in Russian).
21. Grigoryev I.S., Meilikhov E.Z., eds. *Fizicheskie velichiny* [Physical quantities]. Moscow, Energoatomisdat Publ., 1991. 1232 p. (in Russian).
22. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences*, 2009, no. 3, pp. 36–49. (in Russian).
23. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Pugachev O.V. Estimating Electro-physical Properties of the Composite with Dielectric Matrix and Dispersed Conductive Inclusions. *Radiooptika. MGTU im. N.E. Baumana = Radiooptics of the Bauman MSTU*, 2015, no. 3, pp. 51–67. DOI: [10.7463/rdopt.0315.0800066](https://doi.org/10.7463/rdopt.0315.0800066) (in Russian).

24. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. The Effective Coefficients of Thermal Conductivity of Composites with Spherical Inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2012, no. 10, pp. 470–474. (in Russian).
25. Maxwell C. Treatise on electricity and magnetism. In 2 vols. Oxford, Clarendon Press, 1873.
26. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of Dielectric Permittivity of Composite with Dispersed Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering*, 2015, no. 3, pp. 50–64. DOI: [10.18698/0236-3933-2015-3-50-64](https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-3-50-64) (in Russian).
27. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of composite effective thermal conductivity with spherical inclusions by the self-consistency method. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9, pp. 435–444. DOI: [10.7463/0913.0601512](https://doi.org/10.7463/0913.0601512) (in Russian).