

УДК 517.1;530.1

## Оценки электрофизических характеристик композита с диэлектрической матрицей и дисперсными проводящими включениями

Зарубин В. С.<sup>1,\*</sup>, Кувыркин Г. Н.<sup>1</sup>, Пугачев О. В.<sup>1</sup>

\* [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

С использованием вариационного подхода получены двойственные вариационные формулировки задач электростатики и электрокинетики применительно к композиту, диэлектрическая матрица которого модифицирована дисперсными включениями, обладающими свойством электрической проводимости. Эта формулировка включает два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), принимающие на истинном решении задачи одинаковые экстремальные значения, и позволяет установить двусторонние границы возможных значений электрофизических характеристик рассматриваемого композита, а также оценить наибольшую возможную погрешность, которая может возникнуть при использовании в качестве искомым значений этих характеристик полусуммы установленных границ. Количественная оценка возможных погрешностей показала, что для реальных характеристик матрицы и включений рассматриваемого композита необходимо построение математической модели, учитывающей особенности его структуры и электрическое взаимодействие его структурных элементов. На основе построенного варианта подобной модели получена расчетная зависимость для вычисления электрофизических характеристик композита и проведено сравнение результатов расчета по этой зависимости и по формулам, полученным методами осреднения и самосогласования.

**Ключевые слова:** композит; диэлектрическая проницаемость; электрическая проводимость; дисперсные проводящие включения

---

### Введение

Композиты находят широкое применение в технике не только в виде конструкционных и теплозащитных материалов, но и как функциональные материалы в большом числе разнообразных электротехнических приборов и устройств, в том числе в качестве диэлектриков. Для композита, используемого в этом качестве, основными характеристиками являются относительная диэлектрическая проницаемость (далее для краткости слово "относительная" опущено) и электрическая проводимость [1, 2, 3]. Эти характеристики зависят, прежде всего, от свойств матрицы композита и включений, а также от формы и объемной концентрации включений.

Модификация диэлектрика, выполняющего роль матрицы композита, проводящими электрический ток включениями позволяет увеличить диапазон возможного изменения электрофизических свойств такого композита, в частности, в сторону повышения его диэлектрической проницаемости и электрической проводимости и тем самым расширить сферу его применения. Для прогнозирования ожидаемых характеристик рассматриваемого композита необходимо располагать адекватной математической моделью, описывающей структуру композита и электрическое взаимодействие его матрицы и включений.

Одним из распространенных вариантов структуры композитов является дисперсная система, в которой в дисперсионной среде распределена дисперсная фаза с сильно развитой поверхностью раздела между ними [4]. Роль дисперсионной среды могут выполнять различные диэлектрические материалы, в том числе полимеры [5], а дисперсионной фазой могут служить металлические включения [1, 3, 6]. Если включения имеют сопоставимые размеры во всех направлениях, то в первом приближении их можно рассматривать как шаровые, поскольку шар является статистически усредненной формой таких включений.

Для композита с шаровыми включениями, используя различные подходы, можно построить адекватные математические модели, позволяющие достаточно достоверно прогнозировать зависимость его электрических свойств от характеристик включений и матрицы и от объемной концентрации включений. Наряду со смесевыми моделями и методами осреднения [1, 3, 5, 7], обычно используемыми при анализе дисперсных систем, целесообразно использовать вариационные подходы, позволяющие получить двусторонние границы возможных значений искомых параметров композита, между которыми заключены их истинные значения. Такие границы следуют из двойственной вариационной формулировки задачи для потенциального поля в неоднородном твердом теле [8, 9] и дают возможность оценить наибольшую погрешность, которая может возникнуть при использовании для оценки значений искомых параметров той или иной математической модели. Эта формулировка содержит два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), принимающих на истинном решении задачи одинаковые экстремальные значения.

В данной работе вариационный подход прежде всего применен для установления двусторонних оценок диэлектрической проницаемости и электрической проводимости композита с шаровыми включениями, покрытыми слоем электрической изоляции, и получена расчетная зависимость, связывающая эффективные значения этих характеристик композита с параметрами его структурных элементов. Этот подход основан на двойственной вариационной формулировке задач электростатики и электрокинетики в неоднородном твердом теле.

## 1. Постановка задачи

Композит представим в виде множества составных шаровых частиц радиусом  $R_m$ , изменяющимся от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет такими частицами полностью заполнить объем, занятый композитом. В каждой составной частице шаровое

изотропное включение с электрической проводимостью  $\sigma_*$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_*$  окружено сравнительно тонким слоем электроизоляции из материала с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_s$  и малой электрической проводимостью  $\sigma_s$  с целью предотвращения эффекта перколяции [1, 3, 6] при увеличении объемной концентрации включений и их возможном непосредственном контакте, когда они образуют непрерывный проводящий кластер. Внешний шаровой слой составной частицы состоит из материала матрицы с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_m$  и достаточно малой электрической проводимостью  $\sigma_m$ .

Близкое к единице отношение  $R/R_s = \bar{R}$ , где  $R$  и  $R_s$  — изменяющиеся радиусы шарового проводящего включения и внешней сферической поверхности шарового слоя электроизоляции, принято фиксированным при изменении радиуса  $R_m$ . При этом  $(R_s/R_m)^3$  равно объемной концентрации  $C_V$  включений вместе со слоем электроизоляции. Такую составную частицу будем считать представительным элементом структуры рассматриваемого композита.

Расположение включений в композите примем хаотическим. В этом случае композит будет изотропным [10] и его искомые электрофизические характеристики будут определять так называемые эффективные значения диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^*$  и электрической проводимости  $\sigma^*$ , зависящие от  $C_V$  и перечисленных выше параметров, определяющих свойства структурных элементов композита. При постоянном во времени электрическом поле получение соответствующей зависимости для  $\varepsilon^*$  связано с решением задачи электростатики для неоднородного твердого тела, а для  $\sigma^*$  требует решения задачи электрокинетики при прохождении через это тело постоянного электрического тока.

## 2. Основные соотношения

Пусть композит как неоднородное твердое тело занимает область  $V$ . При отсутствии в этом теле свободных электрических зарядов из полной системы уравнений Максвелла [11] следуют уравнения электростатики в виде [12]

$$\nabla \times \mathbf{E}(M) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(M) = 0 \quad \forall M \in V, \quad (1)$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — векторы напряженности электростатического поля и электрического смещения (электрической индукции) соответственно, зависящие от положения точки  $M$  в области  $V$ ;  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор. Из первого уравнения (1) следует, что векторное поле  $\mathbf{E}(M)$  потенциально, что позволяет соотношением

$$\mathbf{E}(M) = -\nabla U(M), \quad (2)$$

тождественно удовлетворяющим это уравнение, ввести скалярный электрический потенциал  $U$ .

Для изотропного неоднородного твердого тела векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  коллинеарны и связаны равенством [11]

$$\mathbf{D}(M) = \varepsilon(M)\varepsilon_0\mathbf{E}(M), \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость (для вакуума  $\varepsilon = 1$ , а для диэлектриков  $\varepsilon > 1$ ),  $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$  А·/(В·)м — электрическая постоянная. Распределение электрического потенциала в таком теле должно удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка в виде

$$\nabla \cdot \left( \varepsilon(M) \nabla U(M) \right) = 0, \quad (4)$$

которое следует из второго уравнения (1) и равенств (2) и (3).

Исходная формулировка задачи электрокинетики [12] в области  $V$ , занятой изотропным неоднородным твердым телом с электрической проводимостью  $\sigma(M)$ ,  $M \in V$ , содержит первое уравнение (1) и соответствующее закону Ома соотношение

$$\mathbf{j}(M) = \sigma(M) \mathbf{E}(M), \quad (5)$$

в котором  $\mathbf{j}$  — вектор плотности постоянного электрического тока проводимости [8], удовлетворяющий закону сохранения электрического заряда в форме  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Из первого уравнения (1) следует, что электрическое поле постоянных токов является безвихревым, т.е. и в этом случае существует скалярный электрический потенциал  $U$ , также определяемый равенством (2). В итоге из закона сохранения электрического заряда с учетом равенств (2) и (5) следует дифференциальное уравнение второго порядка

$$\nabla \cdot \left( \sigma(M) \nabla U(M) \right) = 0. \quad (6)$$

Совпадение структуры уравнений (4) и (6) для задач электростатики и электрокинетики позволяет в дальнейшем результаты, полученные для одной из этих задач, переносить на другую задачу.

### 3. Двойственная вариационная формулировка задач

Выделим на поверхности  $S$  рассматриваемой области  $V$  участки  $S_1$  и  $S_2$ , на которых заданы значения соответственно  $U_1$  и  $U_2$  электрического потенциала:

$$U(P_1) = U_1, \quad \forall P_1 \in S_1; \quad U(P_2) = U_2, \quad \forall P_2 \in S_2; \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (7)$$

Это означает, что вариация  $\delta U$  электрического потенциала на этих участках тождественно равна нулю:

$$\delta U(P_1) \equiv 0, \quad \forall P_1 \in S_1; \quad \delta U(P_2) \equiv 0, \quad \forall P_2 \in S_2. \quad (8)$$

Остальные участки  $S_0 = S \setminus (S_1 \cup S_2)$  поверхности  $S$  примем идеально электроизолированными, т.е.

$$\nabla U(P) \cdot \mathbf{n}(P) \equiv 0 \quad \forall P \in S_0 \subset S, \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали в точках  $P$ .

После умножения уравнения (4) на вариацию  $\delta U(M)$ ,  $M \in V$ , интегрирования полученного произведения по области  $V$  и использования первой формулы Грина в виде [13] (обозначение точки  $M$  опущено)

$$\int_V \left( \nabla \cdot (\varepsilon \nabla U) \right) \delta U dV = \int_S \varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla U \delta U dS - \int_V \varepsilon (\nabla U) \cdot \nabla (\delta U) dV$$

с учетом равенств (8) и (9) запишем

$$\delta \int_V \frac{\varepsilon}{2} (\nabla U) \cdot \nabla U dV = 0,$$

что соответствует условию  $\delta J[U, \delta U] = 0$  стационарности функционала

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon (\nabla U) \cdot \nabla U dV. \quad (10)$$

Функционал (10) допустимо рассматривать на множестве непрерывных в области  $V$  и кусочно дифференцируемых в ней функций  $U(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющим условиям (7) на участках  $S_1$  и  $S_2$  поверхности  $S$ . Этот функционал является строго выпуклым (вниз) [6, 14] и в стационарной точке  $U^*(M)$  ( $M \in V$ ) достигает наименьшего значения  $J[U^*]$ . В случае достаточной гладкости функции  $U^*(M)$  она будет удовлетворять дифференциальной форме математической модели, включающей дифференциальное уравнение (4) и граничные условия (7) и (9).

Если введением векторной функции  $\mathbf{D}(M) = -\varepsilon(M) \cdot \nabla U(M)$  ( $M \in V \cup S_0$ ) расширить область определения функционала (10), а затем наложить на эту функцию дополнительные условия, определяемые вторым уравнением (1) и равенством  $\mathbf{D}(P) \cdot \mathbf{n}(P) = 0$ ,  $P \in S_0$ , то получим альтернативный по отношению к функционалу  $J[U]$  максимизируемый функционал

$$I[\mathbf{D}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}{\varepsilon} dV - U_1 \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS - U_2 \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (11)$$

Функционал (11) допустимо рассматривать на множестве непрерывно дифференцируемых в области  $V$  векторных функций  $\mathbf{D}(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющих указанным выше условиям и интегрируемых на участках  $S_1$  и  $S_2$  поверхности  $S$ . Этот функционал является строго выпуклым вверх [8, 14] и в стационарной точке  $\mathbf{D}^*(M)$  ( $M \in V$ ) достигает наибольшего значения  $I[\mathbf{D}^*]$ , совпадающего со значением  $J[U^*]$ .

Функционалы (10) и (11) составляют двойственную вариационную формулировку задачи электростатики для изотропного неоднородного твердого тела и их значения удовлетворяют соотношению

$$J[U] \geq J[U^*] = I[\mathbf{D}^*] \geq I[\mathbf{D}]. \quad (12)$$

В двойственную вариационную формулировку задачи электрокинетики для такого тела в силу аналогичной формы уравнений (4) и (6) входит аналогичная пара альтернативных функционалов

$$J_*[U] = \frac{1}{2} \int_V \sigma (\nabla U) \cdot \nabla U dV, \quad (13)$$

$$I_*[\mathbf{j}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\sigma} dV - U_1 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS - U_2 \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (14)$$

Условия, которым должны удовлетворять допустимые для функционалов (13) и (14) функции  $U(M)$  и  $\mathbf{j}(M)$ , аналогичны условиям, сформулированным применительно к функционалам (10) и (11). Для значений функционалов (13) и (14) справедливо соотношение

$$J_*[U] \geq J_*[U_*] = I_*[\mathbf{j}^*] \geq I_*[\mathbf{j}], \quad (15)$$

где  $U_*(M)$  и  $\mathbf{j}^*(M \in V)$  — стационарные точки функционалов (13) и (14) соответственно.

#### 4. Построение двусторонних оценок

Двойственные вариационные формулировки задач электростатики и электрокинетики позволяют получить двусторонние оценки эффективных значений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^*$  и электрической проводимости  $\sigma^*$  композита, представленные через характеристики элементов его структуры и их объемные концентрации. Область  $V$ , занятую композитом с дисперсными включениями, выберем в виде прямого цилиндра высотой  $H$  с площадью  $F$  оснований  $S_1$  и  $S_2$ , на которых заданы значения соответственно  $U_1 = 0$   $U_2 = U_H > 0$  скалярного электрического потенциала  $U$  [15]. Боковую поверхность  $S_0$  цилиндра считаем электроизолированной.

Для минимизируемого функционала (10) примем достаточно простое допустимое распределение электрического потенциала  $U(M)$ ,  $M \in \bar{V}$ , линейное по высоте замкнутой цилиндрической области  $\bar{V} = V \cup S$ . Тогда при выборе  $|\nabla U| = U_H/H$  минимизируемый функционал (10) примет вид

$$J_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{U_H}{H} \right)^2 \int_V \varepsilon(M) dV(M) = \frac{U_H^2 F}{2H} \left( (1 - C_V) \varepsilon_m + C_V (1 - \bar{R}^3) \varepsilon_s + C_V \bar{R}^3 \varepsilon_\bullet \right).$$

Для максимизируемого функционала (11) в качестве допустимого распределения вектора  $\mathbf{D}$  примем постоянное значение  $D$  единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. Это значение определим из необходимого условия максимума функционала (11), который примет вид

$$I_1 = -D^2 \frac{FH}{2} \left( \frac{1 - C_V}{\varepsilon_m} + C_V \frac{1 - \bar{R}^3}{\varepsilon_s} + C_V \frac{\bar{R}^3}{\varepsilon_\bullet} \right) - U_H F D.$$

Из условия  $dI_1/dD = 0$  найдем

$$D = - \frac{U_H/H}{(1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V(1 - \bar{R}^3)/\varepsilon_s + C_V \bar{R}^3/\varepsilon_\bullet}$$

и в итоге получим

$$I_1 = \frac{U_H^2 F/(2H)}{(1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V(1 - \bar{R}^3)/\varepsilon_s + C_V \bar{R}^3/\varepsilon_\bullet}.$$

Заменим в рассматриваемой области неоднородное тело однородным с искомым эффективным значением  $\varepsilon^*$  диэлектрической проницаемости композита. В этом случае линейное распределение электрического потенциала по высоте цилиндра будет истинным, на котором минимизируемый функционал примет значение  $J_1^* = \varepsilon^* U_H^2 F / (2H)$ , удовлетворяющее цепочке неравенств (12). Тогда с учетом формул для  $J_1$  и  $I_1$  получим двусторонние оценки

$$\varepsilon_+ = (1 - C_V)\varepsilon_m + C_V(1 - \bar{R}^3)\varepsilon_s + C_V\bar{R}^3\varepsilon_\bullet \geq \varepsilon^*, \quad (16)$$

$$\varepsilon_- = \frac{1}{(1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V(1 - \bar{R}^3)/\varepsilon_s + C_V\bar{R}^3/\varepsilon_\bullet} \leq \varepsilon^*. \quad (17)$$

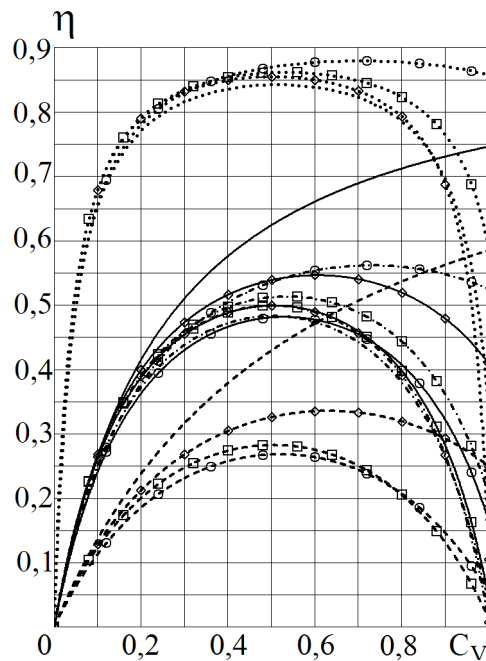
Поскольку структура функционалов (13) и (14) совпадает со структурой функционалов соответственно (10) и (11), а вид неравенств (12) и (15) аналогичен, для двусторонних оценок эффективного значения  $\sigma^*$  электрической проводимости композита справедливы соотношения (16) и (17) при условии замены в них символа  $\varepsilon$  символом  $\sigma$ .

Из соотношений (16) и (17) следует, что  $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon_m$  при  $C_V = 0$ , но по мере увеличения  $C_V$  разность  $\Delta\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)/\varepsilon_m$  возрастает, причем тем быстрее, чем больше отношение  $\varepsilon_\bullet/\varepsilon_m = \bar{\varepsilon}$ . Для некоторых сочетаний значений параметров  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon}_s = \varepsilon_s/\varepsilon_m$  и  $\bar{R}$  эта разность может достигнуть максимума при  $C_V \in (0; 1)$ , а при формально допустимой объемной концентрации  $C_V = 1$  равна

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_s(1 - \bar{R}^3) + \bar{\varepsilon}\bar{R}^3 - \bar{\varepsilon}/(\bar{R}^3 + (1 - \bar{R}^3)\bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}_s).$$

Если в качестве ожидаемого истинного значения  $\varepsilon^*$  выбрать полусумму  $(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$  двусторонних оценок, то наибольшую относительную погрешность, которая может возникнуть при таком выборе, можно оценить величиной  $\eta = (\varepsilon^+ - \varepsilon^-)/(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$ , характеризующей возможный разброс оценок значения  $\varepsilon^*$  при использовании различных математических моделей, описывающих электрическое взаимодействие элементов структуры в рассматриваемом композите. На рис. 1 представлены построенные с использованием соотношений (16) и (17) графики зависимости  $\eta$  от  $C_V$  при значениях  $\bar{\varepsilon} = 10, 50, 0,2$  и  $0,1$  (соответственно штрихпунктирные, пунктирные, штриховые и сплошные линии) и сочетаниях параметров  $\bar{\varepsilon}_s$  и  $\bar{R}$ , равных соответственно 5 и 0,95 (линии без символов), 5 и 0,99 (линии с ромбами), 0,5 и 0,95 (линии с кружками), 0,5 и 0,99 (линии с квадратами). Из рисунка видно, что уже при  $\bar{\varepsilon} = 50$  для всех рассмотренных сочетаний параметров  $\bar{\varepsilon}_s$  и  $\bar{R}$  наибольшая возможная относительная погрешность в промежутке  $C_V \in [0, 1; 0, 9]$  превышает 65%. Причиной высоких значений  $\eta$  является значительный контраст свойств включений и матрицы, характеризуемый параметром  $\bar{\varepsilon}$ . Аналогичные результаты следуют из количественного анализа двусторонних оценок эффективного значения  $\sigma^*$  электрической проводимости рассматриваемого композита.

Двусторонние оценки можно сблизить, уменьшив величину  $\Delta\bar{\varepsilon}$  и связанное с ней значение  $\eta$ , если упростить представительный элемент структуры композита, заменив реальное включение, покрытое слоем электроизоляции, эквивалентным однородным шаровым включением.



**Рис. 1.** Зависимости наибольшей возможной относительной погрешности вычисления диэлектрической проницаемости композита от объемной концентрации включений при различных сочетаниях значений определяющих параметров

## 5. Электрофизические характеристики эквивалентного включения

Для определения электрофизических характеристик эквивалентного однородного шарового включения, заменяющего в представительном элементе структуры композита реальное включение с шаровым слоем электроизоляции, необходимо предварительно построить математическую модель, описывающую электрическое взаимодействие этого включения с однородной средой, имеющей электрофизические характеристики материала электроизоляции. Проведем такое построение применительно к свойству электрической проводимости, имея в виду, что полученный результат будет справедлив и для свойства диэлектрической проницаемости.

Поместим шаровое проводящее включение радиусом  $R$  с электрической проводимостью  $\sigma$  в неограниченную однородную среду с электрической проводимостью  $\sigma_s$ . Начало сферической системы координат с радиальной координатой  $r$  и угловыми координатами  $\vartheta$  и  $\varphi$  выберем в центре включения. На весьма большом расстоянии  $r \gg R$  зададим однородное электрическое поле с вектором  $\mathbf{E}_0$  напряженности, направленным вдоль оси, от которого происходит отсчет полярного угла  $\vartheta$ .

Если в плоскости, соответствующей значению  $\vartheta = \pi/2$  принять нулевым значение электрического потенциала, то дифференциальному уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0,$$

описывающему распределение электрического потенциала  $U$  в однородной среде, будет удовлетворять не зависящая в силу выбора направления вектора  $\mathbf{E}_0$  от угловой координаты



$\varphi$  функция

$$U_s(r, \vartheta) = -(E_0 r + B_s/r^2) \cos \vartheta, \quad E_0 = |\mathbf{E}_0|, \quad B_s = \text{const.} \quad (18)$$

В шаровом включении распределение электрического потенциала, удовлетворяющее уравнению Лапласа, определяет также не зависящая от угла  $\varphi$  функция

$$U_\bullet = A_\bullet r \cos \vartheta, \quad A_\bullet = \text{const.} \quad (19)$$

Коэффициенты  $B_s$  и  $A_\bullet$  в формулах (18) и (19) следует найти из условий непрерывности на сферической поверхности радиусом  $R$  электрического потенциала и радиальной составляющей плотности электрического тока. Эти условия имеют вид

$$U_s(R, \vartheta) = U_\bullet(R, \vartheta), \quad \sigma_s \left. \frac{\partial U_s(r, \vartheta)}{\partial r} \right|_{r=R} = \sigma_\bullet \left. \frac{\partial U_\bullet(r, \vartheta)}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Отсюда с учетом формул (18) и (19) получим два алгебраических уравнения

$$A_\bullet + E_0 + B_s/R^3 = 0, \quad \sigma_\bullet A_\bullet + \sigma_s(E_0 - 2B_s/R^3) = 0,$$

из которых следует

$$A_\bullet = -3E_0\sigma_s/(2\sigma_s + \sigma_\bullet), \quad B_s/R^3 = E_0(\sigma_s - \sigma_\bullet)/(2\sigma_s + \sigma_\bullet). \quad (20)$$

Коэффициент  $B_s$  характеризует возмущение электрического поля в однородной среде, вызванное шаровым включением. Если в этой среде выделить шаровой слой с радиусом  $R_s$  внешней сферической поверхности, то такая условная составная частица не вызовет изменения указанного возмущения электрического поля. Заменяем эту составную частицу равновеликим однородным шаровым включением с эквивалентным значением  $\sigma_*$  электрической проводимости, которое должно вызвать такое же возмущение электрического поля. Если повторить процедуру нахождения коэффициента  $B_s$  в формуле (18) применительно к такому эквивалентному включению, то получим  $B_s = E_0 R_s^3 (\sigma_s - \sigma_*) / (2\sigma_s + \sigma_*)$  и после подстановки во вторую формулу (20) найдем

$$\sigma_* = \sigma_s \frac{2\sigma_s + \sigma_\bullet - 2(\sigma_s - \sigma_\bullet)\bar{R}^3}{2\sigma_s + \sigma_\bullet + (\sigma_s - \sigma_\bullet)\bar{R}^3}. \quad (21)$$

В частном случае идеально проводящего включения радиусом  $R$  ( $\sigma_\bullet \rightarrow \infty$ ) отсюда после предельного перехода следует

$$\sigma_* = \sigma_s (1 + 2\bar{R}^3) / (1 - \bar{R}^3). \quad (22)$$

Для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_*$  эквивалентного включения будет справедлива формула (21) после замены в ней символа  $\sigma$  символом  $\varepsilon$ . Для идеально проводящего включения радиусом  $R$ , формально положив  $\varepsilon_\bullet \rightarrow \infty$  [11], получим аналогичное формуле (22) равенство  $\varepsilon_* = \varepsilon_s (1 + 2\bar{R}^3) / (1 - \bar{R}^3)$ .

## 6. Представительный элемент структуры с эквивалентным включением

Теперь представительный элемент структуры рассматриваемого композита включает эквивалентное шаровое включение радиусом  $R_s$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_*$  и электрической проводимостью  $\sigma_*$ , покрытый шаровым слоем матрицы с внешним радиусом  $R_m$  сферической поверхности, диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_m$  и электрической проводимостью  $\sigma_m$ . Поместим эквивалентное включение в неограниченную однородную среду с электрофизическими характеристиками материала матрицы, выбрав начало сферической системы координат в центре этого включения. Если опять на весьма большом расстоянии  $r \gg R_s$  задать однородное электрическое поле с вектором  $\mathbf{E}_0$  напряженности, направленным вдоль оси, от который происходит отсчет полярного угла  $\vartheta$ , то наличие эквивалентного включения с электрической проводимостью  $\sigma_*$  вызовет аналогичное рассмотренному выше возмущение этого поля, определяемое функцией

$$\Delta U_*(r, \vartheta) = (B_*/r^2) \cos \vartheta, \quad B_*/R_*^3 = E_0(\sigma_m - \sigma_*)/(2\sigma_m + \sigma_*). \quad (23)$$

Выделим в матрице шаровой слой с радиусом  $R_m$  внешней сферической поверхности и заменим эквивалентное включение, покрытое таким слоем, равновеликим однородным шаровым включением с искомым эффективным значением  $\sigma^*$  электрической проводимости рассматриваемого композита, т.е. представительным элементом его структуры с эквивалентным включением. Эта замена вызовет возмущение электрического поля, которое в функции  $\Delta U_m(r, \vartheta) = (B_m/r^2) \cos \vartheta$ , аналогичной функции  $\Delta U_*(r, \vartheta)$  в первой формуле (23), будет теперь характеризовать коэффициент  $B_m = E_0 R_m^3 (\sigma_m - \sigma^*) / (2\sigma_m + \sigma^*)$ . Поскольку проведенная замена не изменит возмущение электрического поля, получим  $B_m = B_*$ , откуда следует

$$\sigma^* = \sigma_m \frac{2\sigma_m + \sigma_* - 2(\sigma_m - \sigma_*)C_V}{2\sigma_m + \sigma_* + (\sigma_m - \sigma_*)C_V}. \quad (24)$$

Для эффективного значения  $\varepsilon^*$  диэлектрической проницаемости композита справедлива формула (24) после замены в ней символа  $\sigma$  символом  $\varepsilon$ .

Модификация представительного элемента структуры композита путем замены реального проводящего включения эквивалентным позволяет модифицировать и двусторонние оценки, которые теперь вместо соотношений (16) и (17) можно представить для эффективного значения  $\sigma^*$  композита в виде

$$\sigma_+^* = (1 - C_V)\sigma_m + C_V\sigma_* \geq \sigma^* \geq 1/((1 - C_V)/\sigma_m + C_V/\sigma_*) = \sigma_-^*. \quad (25)$$

Заменой символа  $\sigma$  символом  $\varepsilon$  это соотношение устанавливает двусторонние границы для эффективного значения  $\varepsilon^*$  диэлектрической проницаемости. Кроме этого возникает возможность модифицировать применительно к рассматриваемому композиту известную формулу, полученную для эффективной диэлектрической проницаемости мелкодисперсной смеси частиц осреднением векторного поля электрического смещения [11], записав

$$\varepsilon_1^* = \left( (1 - C_V)\varepsilon_m^{1/3} + C_V\varepsilon_*^{1/3} \right)^3, \quad \sigma_1^* = \left( (1 - C_V)\sigma_m^{1/3} + C_V\sigma_*^{1/3} \right)^3. \quad (26)$$

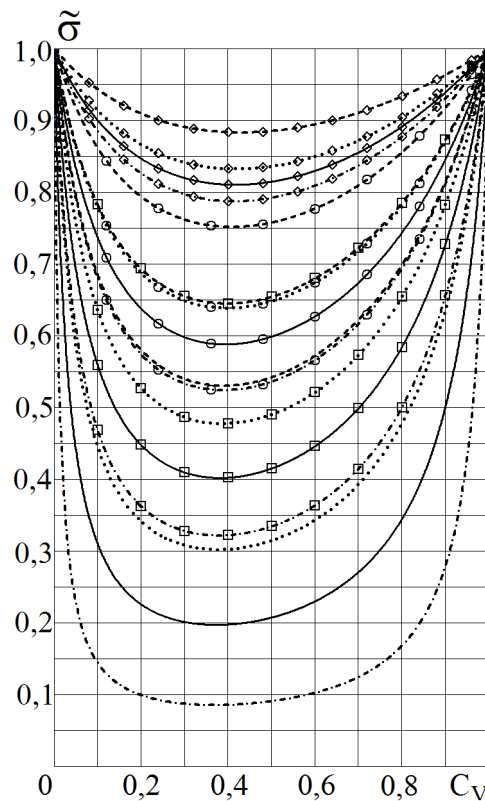
Рассматривая композит как дисперсную смесь эквивалентных включений и шаровых частиц матрицы, можно использовать метод самосогласования [15], который для эффективного значения  $\sigma^*$  электрической проводимости композита приведет к расчетной зависимости

$$\sigma_2^* = \left( 2\sigma_m - \sigma_* + 3(\sigma_* - \sigma_m)C_V + \sqrt{(2\sigma_m - \sigma_* + 3(\sigma_* - \sigma_m)C_V)^2 + 8\sigma_m\sigma_*} \right) / 4. \quad (27)$$

Эта формула после замены символа  $\sigma$  символом  $\varepsilon$  будет применима для расчета эффективного значения  $\varepsilon_2^*$  диэлектрической проницаемости композита.

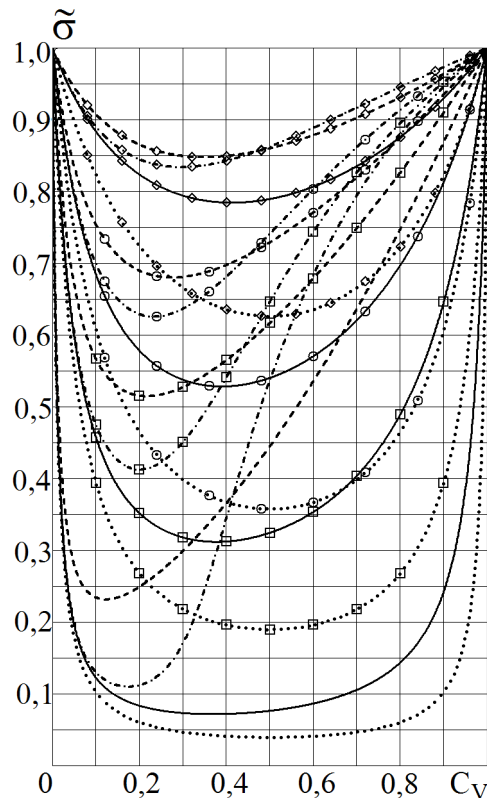
## 7. Количественный анализ полученных оценок

Поскольку все полученные соотношения для  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$  имеют попарно одинаковую структуру, количественный анализ этих соотношений проведем лишь для эффективного значения электрической проводимости рассматриваемого композита. На рис. 2 приведены построенные по формуле (24) с учетом равенства (21) и соотношения (25) графики зависимости отношения  $\tilde{\sigma} = \sigma^* / \sigma_+^*$  (в целях более рационального использования масштаба рисунка) от  $C_V$  при  $\bar{\sigma} = \sigma_\bullet / \sigma_m = 50$  и значениях  $\bar{\sigma}_s = \sigma_s / \sigma_m = 0, 1, 1, 2, 5$  (соответственно штрихпунктирные, сплошные, пунктирные и штриховые кривые) и  $\bar{R} = 0, 8, 0,9, 0,95, 0,99$  (линии соответственно с ромбами, кружками, квадратами и без символов). Следует отметить, что даже в случае сравнительно тонкого электроизолирующего слоя ( $\bar{R} = 0,99$ ) изменение параметра  $\bar{\sigma}_s$  заметно влияет на величину  $\tilde{\sigma}$ .



**Рис. 2.** Зависимости электрической проводимости композита от объемной концентрации включений при различных сочетаниях значений определяющих параметров

Для реальных композитов с полимерной матрицей и металлическими включениями  $\sigma_m \approx 10^{-18} \dots 10^{-10} \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$  [16], а для большинства металлов  $\sigma_{\bullet} \approx 10^5 \dots 10^6 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ , т.е. значение  $\bar{\sigma}$  может иметь порядок  $10^{15} \dots 10^{24}$ . В этом случае включения допустимо считать идеально проводящими ( $\sigma_{\bullet} \rightarrow \infty$ ) и для электрической проводимости эквивалентного включения вместо формулы (21) использовать равенство (22). С использованием этого допущения на рис. 3 пунктирной линией с символами, соответствующими тем же значениям параметра  $\bar{R}$ , что и на рис. 2, представлены построенные по соотношению (25) графики зависимости от  $C_V$  нижней границы  $\tilde{\sigma}_- = \sigma_-^*/\sigma_+^*$  возможных значений отношения  $\sigma^*/\sigma_+^*$  (верхняя граница соответствует значению  $\tilde{\sigma}_+ = 1$ ). Оказалось, что нижняя граница не зависит непосредственно от значений  $\sigma_s$ , но изменение параметра  $\bar{R}$  существенно влияет на расположение этой границы. Сплошные кривые на рис. 3 соответствуют зависимости  $\tilde{\sigma}$  от  $C_V$ , штриховые — зависимости  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1^*/\sigma_+^*$ , определяемой второй формулой (26), а штрихпунктирные — зависимости  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2^*/\sigma_+^*$ , определяемой формулой (27). Для любого фиксированного значения  $\bar{R}$  графики всех этих зависимостей находятся в пределах установленных границ возможных значений электрической проводимости рассматриваемого композита, причем ближе к нижней границе расположены графики, построенные по формуле (24), ближе к верхней — соответствующие второй формуле (26), а промежуточное положение между ними занимают графики, построенные по формуле (27), полученной методом самосогласования.



**Рис. 3.** Границы областей возможных значений электрической проводимости композита и расположение в них результатов расчета этой характеристики по различным зависимостям

## Заключение

Построенные на основе вариационного подхода двусторонние оценки диэлектрической проницаемости и электрической проводимости композита с дисперсными включениями дали возможность установить область возможных значений этих характеристик при различных сочетаниях свойств матрицы композита и включений и различных значениях объемной концентрации включений. Количественный анализ расчетных зависимостей, полученных на основе модели представительного элемента структуры композита и методами осреднения и самосогласования показал, что вычисленные по этим зависимостям значения электрофизических характеристик расположены в соответствующих областях, ограниченных двусторонними оценками.

Работа выполнена по гранту НШ–1432.2014.8 программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту 1.2640.2014.

## Список литературы

1. Трофимов Н.Н., Канович М.З., Карташов Э.М., Натрусов В.И., Пономаренко А.Т., Шевченко В.Г., Соколов В.И., Симонов-Емельянов И.Д. Физика композиционных материалов. В 2 т. Т. 2 / под общ. ред. Н.Н. Трофимова. М.: Мир, 2005. 344 с.
2. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.
3. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
4. Политехнический словарь / Гл. ред. А.Ю. Ишлинский. М.: Сов. энциклопедия, 1989. 656 с.
5. Сажин Б.И., Лобанов А.М., Романовская О.С. и др. Электрические свойства полимеров / под ред. Б.И. Сагина. Л.: Химия, 1986. 224 с.
6. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
7. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Маркевич М.Н. Математическое моделирование диэлектрических свойств полимер-керамических композиционных материалов методом асимптотического осреднения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 97–108. DOI: [10.7463/1013.0623343](https://doi.org/10.7463/1013.0623343)
8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Пугачев О.В. Вариационный подход к оценке диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Математика и матема-

тическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 37–49.  
DOI: [10.7463/mathm.0215.0769483](https://doi.org/10.7463/mathm.0215.0769483)

10. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
12. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 232 с.
13. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 700 с.
14. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 488 с.
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 50–64.
16. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

## Estimating Electro-physical Properties of the Composite with Dielectric Matrix and Dispersed Conductive Inclusions

Zarubin V. S.<sup>1,\*</sup>, Kuvyrkin G. N.<sup>1</sup>, Pugachev O. V.<sup>1</sup>

[\\*fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

Bauman Moscow State Technical University

---

**Keywords:** composite, permittivity, electrical conductivity, dispersed conducted inclusions

---

Composites are widely used in technology not only as the structural and heat-protective materials, but also as the functional materials in a large diversity of electrical equipment and devices, and as the dielectric materials too. Main characteristics of so used composite are relative dielectric constant and electrical conductivity. These characteristics depend, first all, on the properties of the composite matrix and inclusions, as well as on the shape and volume concentration of inclusions.

As a composite matrix, a dielectric modified by inclusions to conduct electrical current can increase a range of possible changes in the electro-physical properties of such a composite, in particular towards increasing its dielectric permeability and electrical conductivity, and thereby extend the scope of its application. To predict the expected properties of the considered composite it is necessary to have a composite adequate mathematical model describing the structure of the composite and electrical interaction of its matrix and inclusions.

One of the most common variants of the composite structure is a dispersion system, where in dispersion medium a dispersed phase is distributed with well-developed surface of interface between them. Various dielectric materials, including polymers, can perform a role of the dispersion medium, and metallic inclusions can serve as the dispersion phase. If inclusions are comparable in size in all directions, then, in the first approximation, they can be considered as spherical because ball is a statistically averaged shape of inclusions.

Using a variety of approaches the adequate mathematical models can be built for the composite with ball inclusions to predict quite reliably how its electrical properties depend on the characteristics of the inclusions and matrix and on the volume concentration of inclusions. Along with the mixed models and averaging methods, usually used to analyze disperse systems, it is expedient to use approaches of variation to obtain bilateral boundaries of the possible values of required parameters of the composite, within which there are true values. Such boundaries follow from the dual variational formulation of the problem for the potential field in inhomogeneous solid and permit to assess the greatest error that can occur when one or another mathematical model is used

to estimate values of required parameters. This formulation contains two alternative functionals (minimized and maximized), taking on the same extreme values at the true solution of a problem.

This work uses the variational approach, primarily, to make bilateral estimates of permittivity and electrical conductivity of the composite with ball inclusions, which are covered by a layer of electrical insulation. It also provides a predicted dependence to relate the effective values of these characteristics of the composite to the parameters of its structural elements. This approach is based on the dual variational formulation of problems of electrostatics and electro-kinetics in inhomogeneous solid.

## References

1. Trofimov N.N., Kanovich M.Z., Kartashov E.M., Natrusov V.I., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G., Sokolov V.I., Simonov-Emel'janov I.D. *Fizika kompozitsionnykh materialov. V 2 t. T. 2.* [Physics of composite materials. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Mir publ., 2005, 344 p. (in Russian)
2. Prokhorov A.M., ed. *Fizicheskii entsiklopedicheskii slovar'* [Physical encyclopedic dictionary]. Moscow, Sovetskaia entsiclopediia, 1983. 928 p. (in Russian)
3. Tareev B.M. *Fizika dielektricheskikh materialov* [Physics of dielectric materials]. Moscow, Energoizdat publ., 1982, 320 p. (in Russian)
4. Ishlinskii A.Yu., ed. *Politekhnikheskii slovar'* [Politechnical dictionary]. Moscow, Sovetskaia entsiclopediia, 1989. 656 p. (in Russian)
5. Sazhin B.I., Lobanov A.M., Romanovskaja O.S. et al. *Elektricheskie svoystva polimerov* [The electrical properties of polymers]. Leningrad, Himija publ., 1986, 224 p. (in Russian)
6. Vinogradov A.P. *Elektrodinamika kompozitnykh materialov* [Electrodynamics of composite materials]. Moscow, Editorial URSS, 2001, 208 p. (in Russian)
7. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevich M.N. Mathematical simulation of dielectric properties of polymer-ceramic composite materials, using the asymptotical averaging method. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 97–108. DOI: [10.7463/1013.0623343](https://doi.org/10.7463/1013.0623343) (in Russian)
8. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electro-dynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian)
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Pugachev O.V. Estimate of permittivity of anisotropic composites with lamellar inclusions by the self-assessment method. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie = Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU*, 2015, no. 2, pp. 37–49. DOI: [10.7463/mathm.0215.0769483](https://doi.org/10.7463/mathm.0215.0769483) (in Russian)
10. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka publ., 1977, 400 p. (in Russian)



11. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskay fizika. V 10 t. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 8. Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka publ., 1992, 664 p. (in Russian)
12. Tolmachev V.V., Golovin A.M., Potapov V.S. *Termodinamika i elektrodinamika sploshnoj sredy* [Thermodynamics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MSU publ., 1988, 232 p. (in Russian)
13. Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennyye metody matematicheskoy fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. V.S. Zarubin, A.P. Krishchenko, eds. Moscow, Bauman MSTU publ., 2004. 700 p. (in Russian)
14. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* [The calculus of variations and optimal control]. V.S. Zarubin, A.P. Krishchenko, eds. Moscow, Bauman MSTU publ., 2001, 488 p. (in Russian)
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of dielectric permittivity of composite with dispersed inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Instrument Engineering*, 2015, no. 3, pp. 50–64. (in Russian)
16. Grigor'ev I.S., Mejlihov E.Z., eds. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical quantities: Handbook]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 p. (in Russian).